Gli asintoti verticali

Riassunto: gli asintoti verticali sono delle rette parallele all'asse delle y. Hanno equazione x = un valore numerico. Vanno cercati nei punti che non appartengono al dominio e nei punti di frontiera. L'asintoto verticale esiste facendo il limite se esce $\pm\infty$.

L'asintoto orizzontale è parallelo all'asse delle x. Ha equazione y = un numero l. Esiste quando è uguale ad un numero (non a $\pm\infty$).

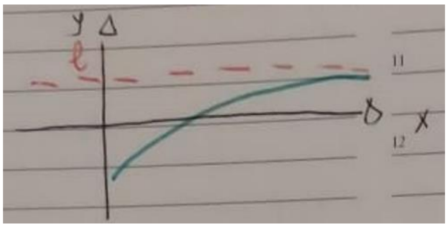
Asintoto orizzontale destro (A.O. dx)

Data una funzione f:D →R

D illimitato a destra (D = R oppure D= [a, +∞[)   (a è un numero qualsiasi)

Si dice la retta y = l è un asintoto orizzontale destro. l è un numero.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$



Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ A.O. non esiste. Deve venir fuori un numero.

Asintoto orizzontale sinistro (A.O. sx)

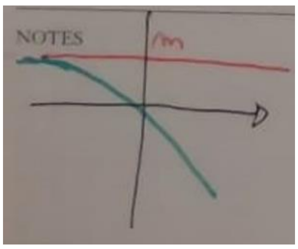
Data una funzione f:D →R

D illimitato a sinistra (D = R oppure D= [-∞, b[)   b è un numero.

Si dice la retta y = m è un asintoto orizzontale sinistro

Se esiste ed è finito il $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e tale limite è uguale ad un numero m.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m \qquad y = m$$



Osservazione 1

A.O.dx e A.O.sx possono essere diversi

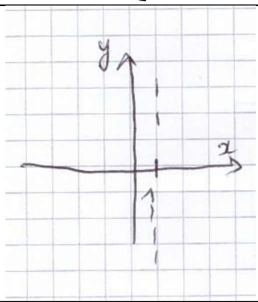
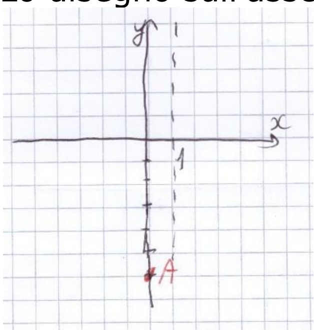
Osservazione 2

Nelle funzioni fratte A.Odx = A.O.sx

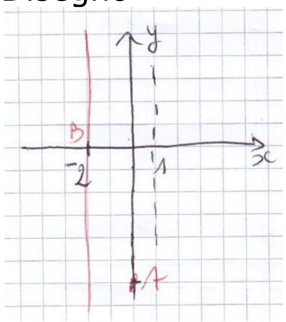
Per cui si può fare direttamente $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Non lo facciamo due volte ma un'unica volta.

Esercizio 1 – asintoti orizzontali

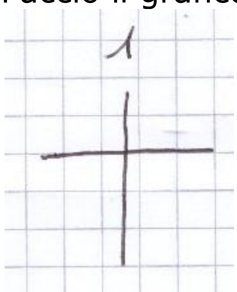
$$y = \frac{3x+6}{x-1}$$

Vedo se la funzione è pari o dispari	Né pari né dispari
Trovo il dominio	Pongo il denominatore diverso da zero $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ D = R -{ 1}
Faccio il disegno	
Intersezione con asse y	$\begin{cases} X = 0 \\ y = \frac{3x+6}{x-1} = \frac{6}{-1} \end{cases}$ Ho il punto A(0,-6) Lo disegno sull'asse cartesiano: 
Intersezioni con asse x	$\begin{cases} Y = 0 \\ \frac{3x+6}{x-1} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ 3x + 6 = 0 \end{cases}$

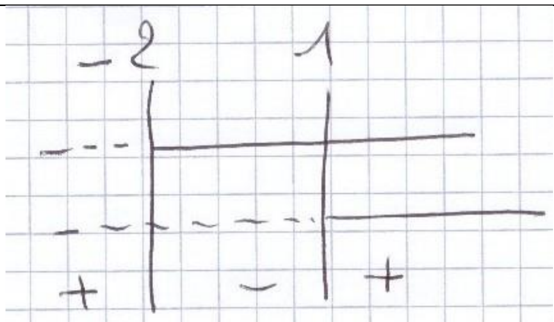
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Y = 0
$\frac{\cancel{3}}{3}x = \frac{-6}{3} = -2$

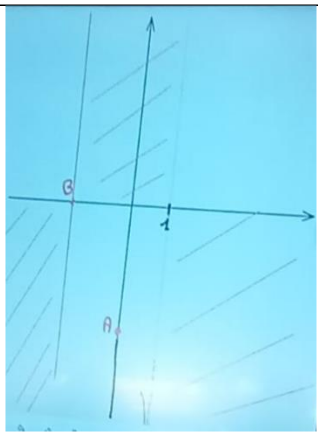
$\begin{cases} y = 0 \\ X = -2 \end{cases}$
Ho il punto B(-2,0)
Disegno


</td>
</tr>
<tr>
<td>Studio del segno</td>
<td>
Pongo la funzione maggiore di 0
$\frac{3x + 6}{x - 1} > 0$
Pongo il numeratore maggiore di 0
$3x + 6 \ > 0$
L’ho già risolto.
$x \ > -2$
Faccio direttamente il grafico perché l’ho già risolto.


Pongo il denominatore maggiore di 0
$x - 1 > 0$
$x > 1$
Faccio il grafico cerchiandolo di rosso.


unisco i grafici
</td>
</tr>
</table>

	 Cancello nel grafico cartesiano 
Ricerca degli asintoti verticali nei punti che non appartengono al dominio Per scrivere un + o un – dopo lo zero, vedo nel cerchio rosso NB: se il limite è $+\infty$, vuol dire che l'asintoto verticale esiste. E quindi scrivo $x = -3\ A.V.sx$	Siccome non c'è simmetria, devo fare prima con -3 e poi con +3 Studio il limite con -3. $\lim_{x\to 1}\frac{3x+6}{x-1} = \frac{9}{0}$ C'è fratto zero quindi cerco il limite da destra e il limite da sinistra $\lim_{x\to 1}\frac{3x+6}{x-1} = \frac{9}{0} \rightarrow sx\,\frac{9}{0^-} = +\infty \quad x = 1\ A.V.sx$ $\rightarrow dx\,\frac{9}{0^+} = +\infty \quad x = 1\ A.V.dx$
Disegno gli asintoti.	Disegno l'asintoto verticale sinistro: si avvicina alla retta.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Disegno l’asintoto verticale destro. Parto dalla retta e mi allontano.


</td>
</tr>
<tr>
<td>Cerco l’asintoto orizzontale</td>
<td>
È una funzione fratta? Se esiste l’asintoto orizzontale vuol dire che a dx e a sx è identico. Quindi faccio solo un calcolo.

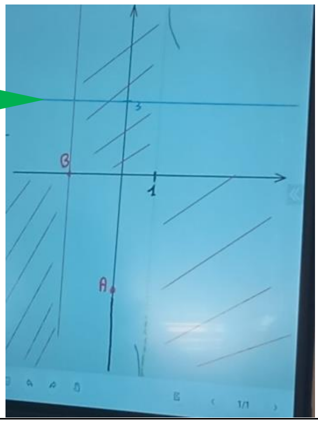
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+6}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

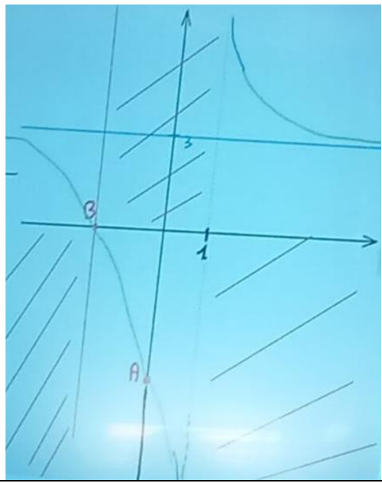
È una forma indeterminata. Risolvo col metodo veloce. Lascio il termine con la x con l’esponente più alto.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+6}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=3$$

Ho un numero, quindi l’asintoto esiste e lo disegno.

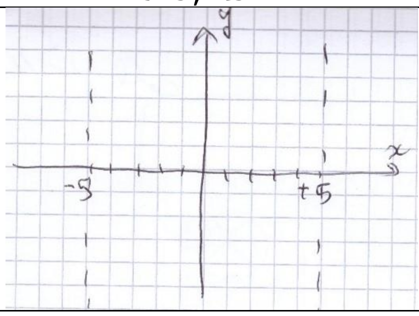
y=3 A.O.

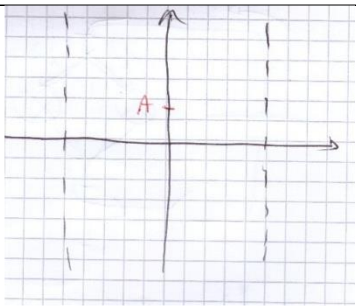
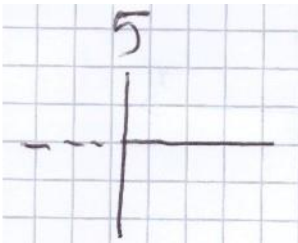
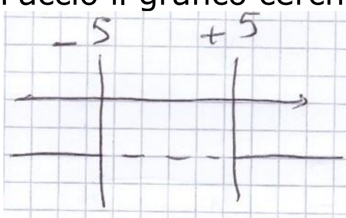

</td>
</tr>
</table>

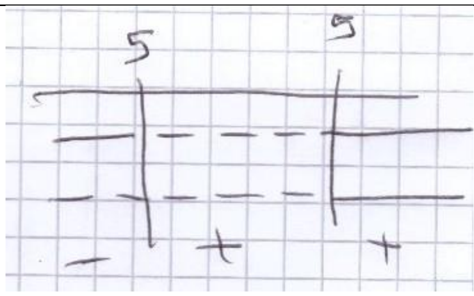
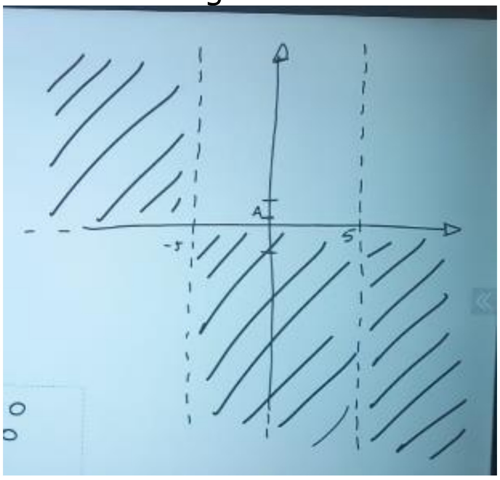
Proviamo a disegnare la funzione	Potrebbe fare così ma ancora non lo sappiamo. 

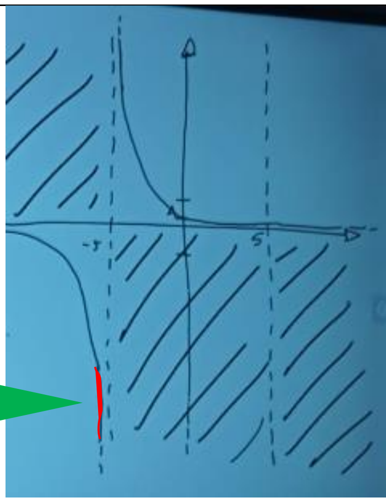
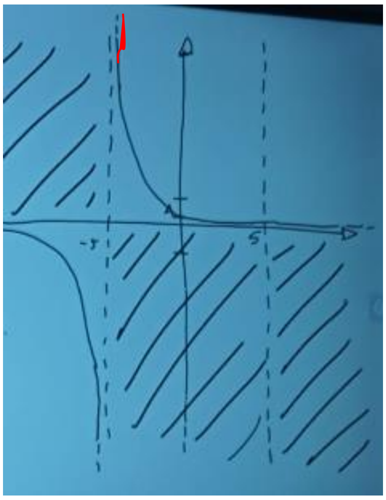
Esercizio 2 – asintoti orizzontali

$$y = \frac{x-5}{x^2-25}$$

Vedo se la funzione è pari o dispari	Né pari né dispari
Trovo il dominio	Pongo il denominatore diverso da zero $x^2 - 25 \neq 0$ $x^2 \neq 25$ $x \neq \pm 5$ D = R - {-5,+5}
Faccio il disegno	
Intersezione con asse y	$\begin{cases} X = 0 \\ y = \frac{x-5}{x^2-25} \end{cases}$ $\begin{cases} X = 0 \\ y = \frac{-5}{-25} = \frac{1}{5} \end{cases}$ Ho il punto A(0, $\frac{1}{5}$) Lo disegno sull'asse cartesiano:

	
Intersezioni con asse x	$\begin{cases} Y = 0 \\ \dfrac{x-5}{x^2-25} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ x-5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ Non lo possiamo accetttare. Non appartiene al dominio.
Studio del segno	Pongo la funzione maggiore di 0 $\dfrac{x-5}{x^2-25} > 0$ Pongo il numeratore maggiore di 0 $x-5\ > 0$ $x\ > 5$ Faccio direttamente il grafico perché l'ho già risolto.  Pongo il denominatore maggiore di 0 $x^2-25 > 0$ $x^2-25 = 0$ $x = \pm 5$ Faccio il grafico cerchiandolo di rosso.  unisco i grafici

	 Cancello nel grafico cartesiano 
Ricerca degli asintoti verticali nei punti che non appartengono al dominio Per scrivere un + o un − dopo lo zero, vedo nel cerchio rosso NB: se il limite è $+\infty$, vuol dire che l’asintoto verticale esiste. E quindi scrivo $x = -3\ A.V.sx$	Siccome non c’è simmetria, devo fare prima con -5 e poi con +5 Studio il limite con -3. $\lim_{x\to-5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{-5-5}{25-25}=\frac{-10}{0}$ C’è fratto zero quindi cerco il limite da destra e il limite da sinistra $\lim_{x\to-5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{-10}{0}$ $sx\frac{-10}{0-}=+\infty$ $x=-5\ A.V.sx$ $dx\frac{-10}{0^+}=-\infty$ $x=-5A.V.dx$
Disegno gli asintoti.	Disegno l’asintoto verticale sinistro: si avvicina alla retta.

	 Disegno l’asintoto verticale destro. Parto dalla retta e mi allontano. 
	Studio il limite con +5. $\lim_{x\to+5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{5-5}{25-25}=\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to+5}\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{10}$ $\nexists A.V.$
Cerco l’asintoto orizzontale	È una funzione fratta? Se esiste l’asintoto orizzontale vuol dire che a dx e a sx è identico. Quindi faccio solo un calcolo $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{\infty}{\infty}$ È una forma indeterminata. Risolvo col metodo veloce. Lascio il termine con la x con l’esponente più alto. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\frac{1}{\infty}=0$

	Ho un numero, quindi l'asintoto esiste e lo disegno. y = 0 A.O.