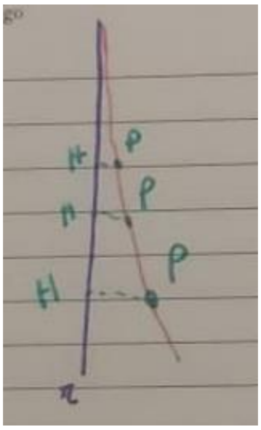
Asintoti

Spiegazione

L'asintoto è una **retta** con quale particolarità? Se prendo una funzione, una qualsiasi curva e la disegno: l'asintoto è in blu, la funzione è in rosso.



Un **ramo della funzione deve tendere all'infinito**. Prendo un punto P qualsiasi e calcolo la distanza PH di questo punto. Andando verso l'infinito, la distanza tende a diventare zero. Se si verifica questa condizione, la retta è un asintoto.

Definizione:

Data una retta r e una funzione f, si dice che la retta r è un asintoto per la funzione f(x) se la distanza di P dalla retta r (Pr) tende a O quando P si allontana indefinitamente lungo la funzione.

Esistono 3 tipi di asintoti:

- Asintoto verticale A.V.
- Asintoto orizzontale A.O.
- Asintoto obliquo A.Ob.

> Cos'è un punto di frontiera?
>
> Se ho D =]3, +∞[
>
> 3 è un punto di frontiera perché è escluso ed è al limite.

Asintoto verticale destro (A.V. dx)

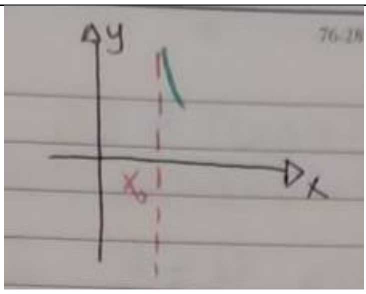
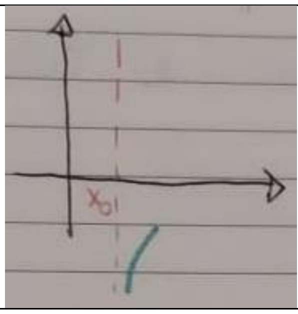
Data una funzione f:D →R

E preso un punto $X_0 \in R, X_0 \notin D$ cioè D = R $-\{X_0\}$ o X_0 punto di frontiera D=$]X_0,+\infty[$

Si dice che la retta è un asintoto verticale destro

(A.V. dx) se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$se \lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = +\infty$	$se \lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = -\infty$
	

Asintoto verticale sinistro (A.V. sx)

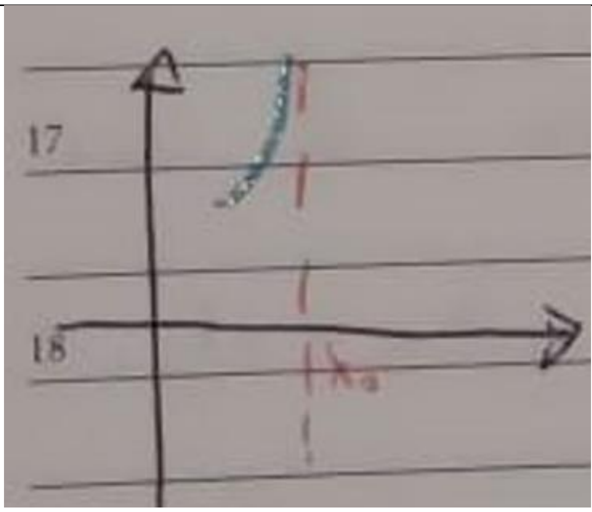
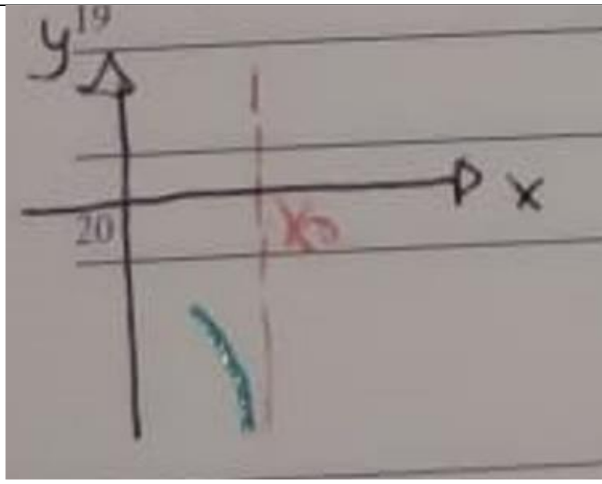
Data una funzione f:D →R

E preso un punto $X_0 \in R, X_0 \notin D$ o X_0 è un punto di frontiera D=]-∞, X_0[

Si dice che la retta x = x_0 è un asintoto verticale sinistro

(A.V sx) se

$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = \pm\infty$

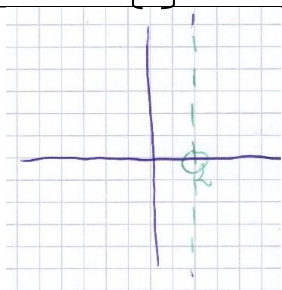
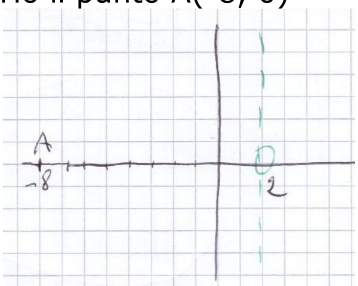
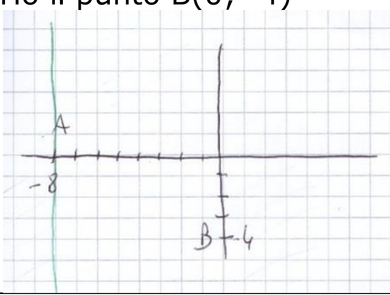
$se \lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = +\infty$	$se \lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = -\infty$
	

Osservazione

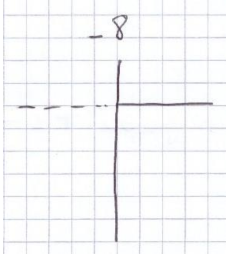
1) A.V. è una retta **parallela all'asse y**
2) Va cercato nei punti che non appartengono al DOMINIO e nei punti di frontiera.

Esercizio 1

$$y = \frac{x+8}{x-2}$$

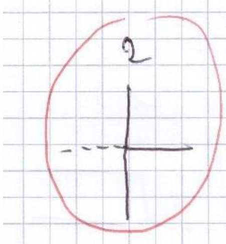
Vedo se la funzione è pari o dispari	Né pari né dispari
Trovo il dominio	Pongo il denominatore diverso da zero $x - 2 \neq 0$ $x \neq 2$ D = R - $\{2\}$
Faccio il disegno, escludo il punto 2	
Intersezioni con asse x	$\begin{cases} Y = 0 \\ \frac{x+8}{x-2} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ X = -8 \end{cases}$ Ho il punto A(-8, 0) 
Intersezione con asse y	$\begin{cases} X = 0 \\ y = \frac{+8}{-2} = -4 \end{cases}$ Ho il punto B(0; -4) 
Studio del segno	Pongo la funzione maggiore di 0 $\frac{x+8}{x-2} > 0$ Pongo il numeratore maggiore di 0 X+8> 0 X> -8

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

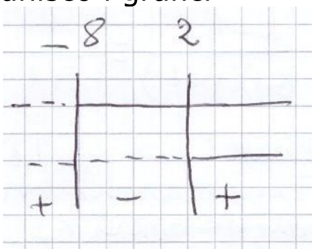


Pongo il denominatore maggiore di 0

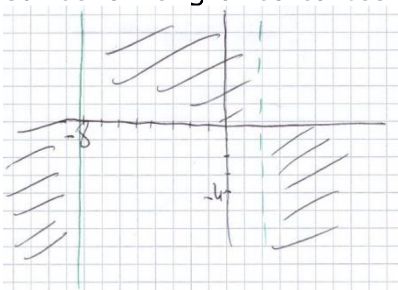
x-2 > 0 X> 2



unisco i grafici



Cancello nel grafico cartesiano



</td>
</tr>
<tr>
<td>Ricerca degli asintoti verticali</td>
<td>

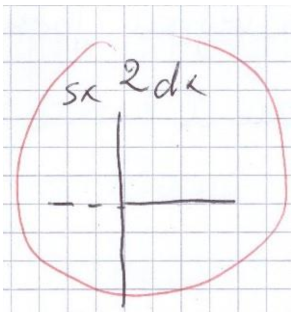
$\lim_{x\to1}\frac{x+8}{x-2}=\frac{0}{0}$

Studio limite da dx e da sx

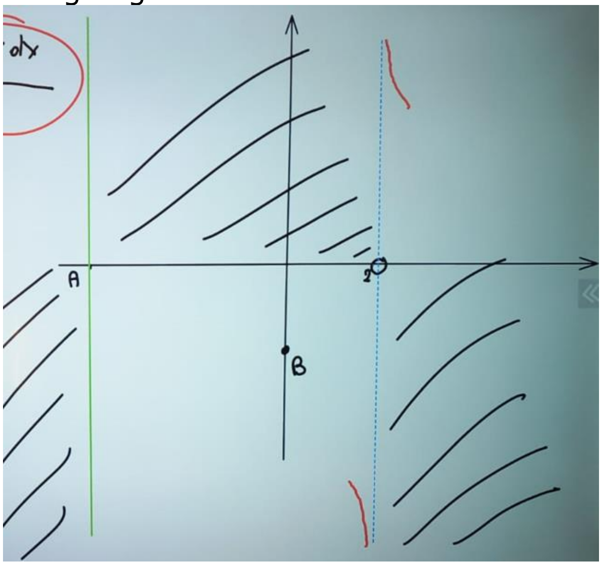
$\lim_{x\to1}\frac{x+8}{x-2}=\frac{10}{0} \rightarrow sx\,\frac{10}{0^-}= -\infty \quad x=2\ A.V.sx$

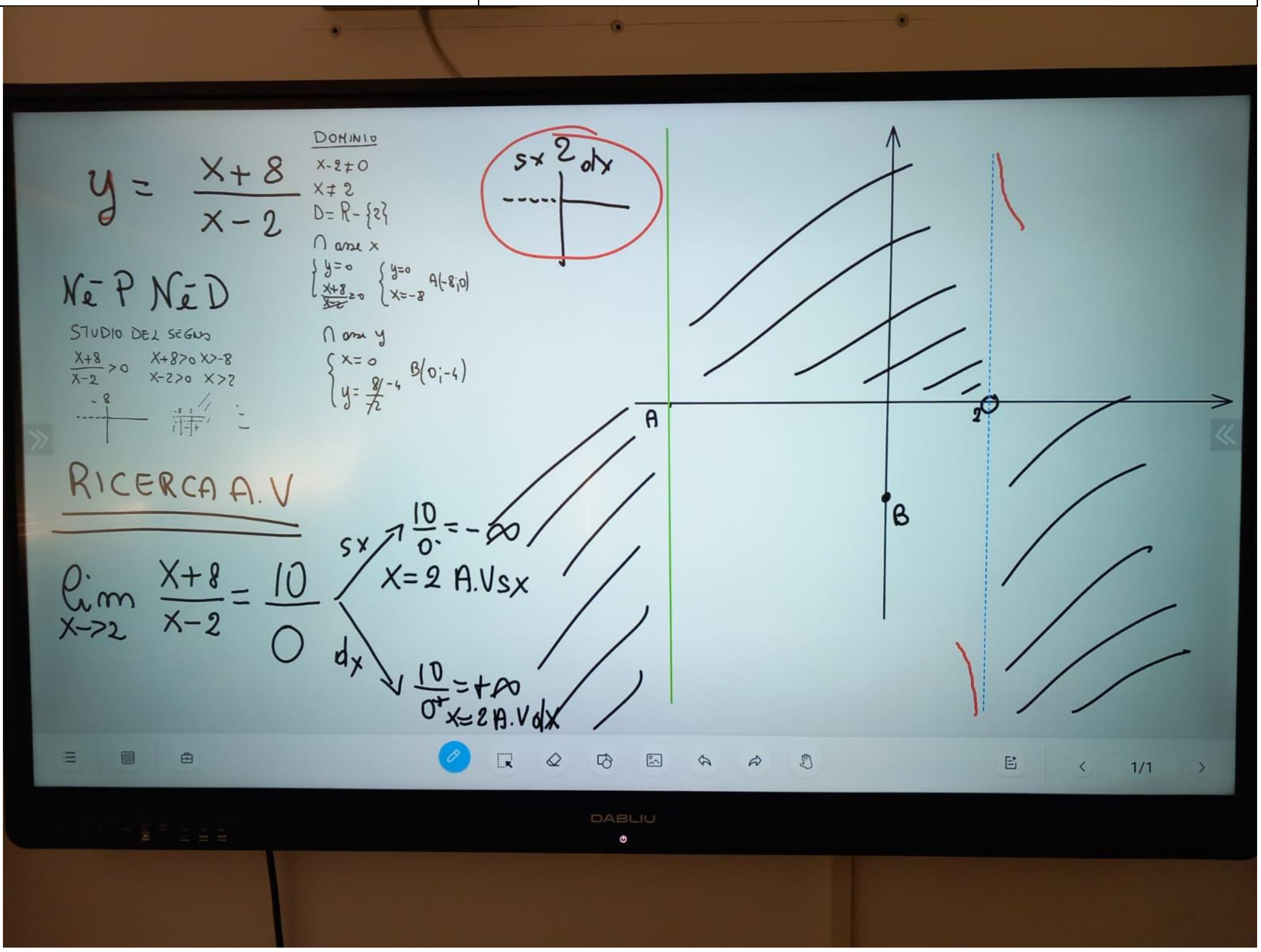
$dx\,\frac{10}{0^+}=+\infty \quad x=2\ A.V.dx$

Vedo nel cerchio rosso



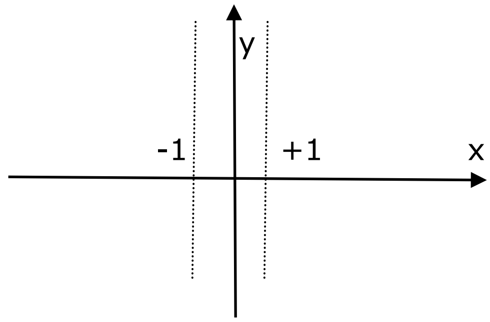
</td>
</tr>
</table>

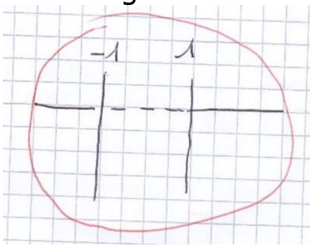
<table>
<tr><td></td><td>Disegno gli asintoti

</td></tr>
</table>

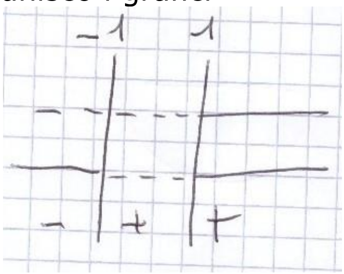


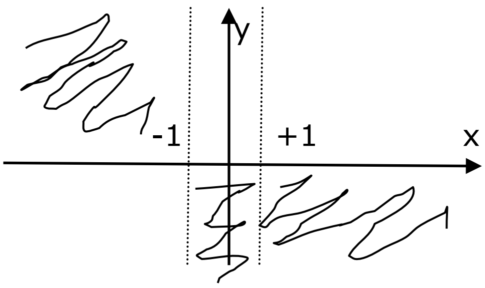
Esercizio 2

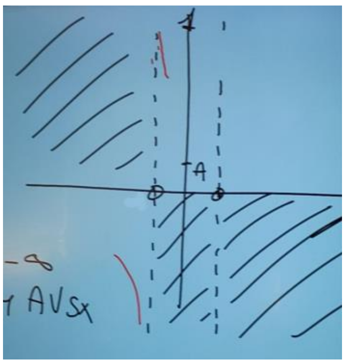
$$y = \frac{x-1}{x^2-1}$$

Vedo se la funzione è pari o dispari	• Il numeratore è né pari né dispari • Il denominatore è pari • Tutta la funzione non è né pari né dispari perché uno dei due è né pari né dispari
Trovo il dominio	Pongo denominatore diverso da zero $x^2 - 1 \neq 0$ $x^2 \neq 1$ $x \neq \pm 1$ D = R - {-1, 1}
Disegno il piano cartesiano	
Intersezioni con asse x	$\begin{cases} Y = 0 \\ \frac{x-1}{x^2-1} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ X = 1 \end{cases}$ B(1, 0) B non appartiene al dominio: $B(1{,}0)\nexists$
Intersezione con asse y	$\begin{cases} X = 0 \\ y = \frac{-1}{-1} \end{cases}$ $\begin{cases} X = 0 \\ y = +1 \end{cases}$ A(0; 1)
Studio del segno	Pongo funzione maggiore di 0 $\frac{x-1}{x^2-1} > 0$ $x - 1 > 0$ $x > 1$ Faccio il grafico del numeratore  $x^2 - 1 > 0$ è una disequazione di secondo grado, ho trovato le

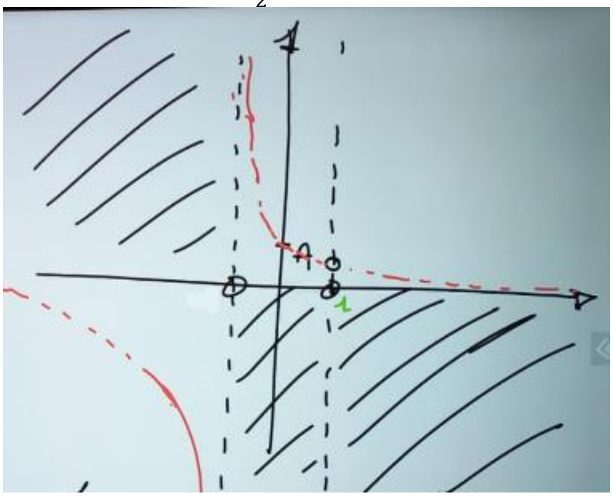
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
soluzioni, faccio direttamente il grafico
faccio il grafico del denominatore e lo cerchio di rosso


unisco i grafici


Riporto i risultati cancellando sul grafico cartesiano


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Ricerca degli asintoti verticali
Dobbiamo fare -1 e + 1
perché non c'è la simmetria
</td>
<td>
$$\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-1-1}{(-1)^2-1}=\frac{-2}{0}$$
Studio limite da dx e da sx
Faccio il limite di -1
$\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0}$ → $sx\frac{-2}{0^+}-\infty$ $x=-1\ A.V.sx$
→ $dx\frac{2}{0^-}=+\infty$ $x=+1\ A.V.dx$


Faccio il limite per +1
</td>
</tr>
</table>

	$\lim_{x\to+1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to+1}\frac{\cancel{x-1}}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}$ 0 fratto 0 è una forma indeterminata. Lo devo scomporre Esiste l'asintoto verticale per + 1? No perché non è venuto fuori + o − ∞. Quindi scrivo: NON ESISTE ASINTOTO VERTICALE. Conosco invece l'ordinata del punto che passerà per $\frac{1}{2}$ Avrò il punto $(1;\frac{1}{2})$ 

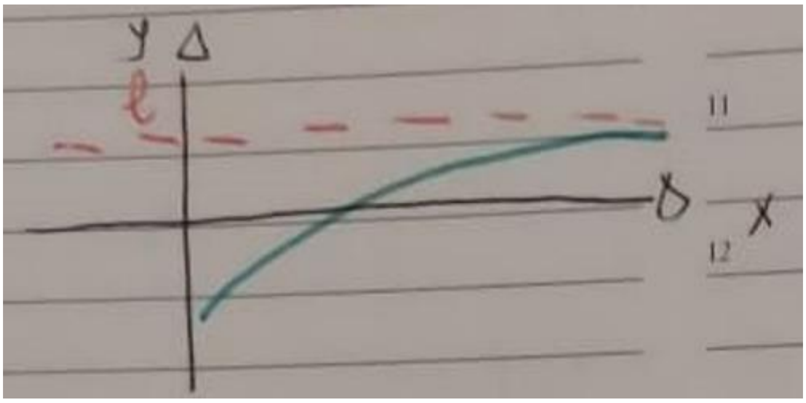
Asintoto orizzontale destro (A.O. dx)

Data una funzione f:D →R

D illimitato a destra (D = R oppure D= [q, +∞[

Si dice la retta y = l è un asintoto orizzontale destro

- Se ∃ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ finito e tale limite è l



- Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ A.O. non esiste

Asintoto orizzontale sinistro (A.O. sx)

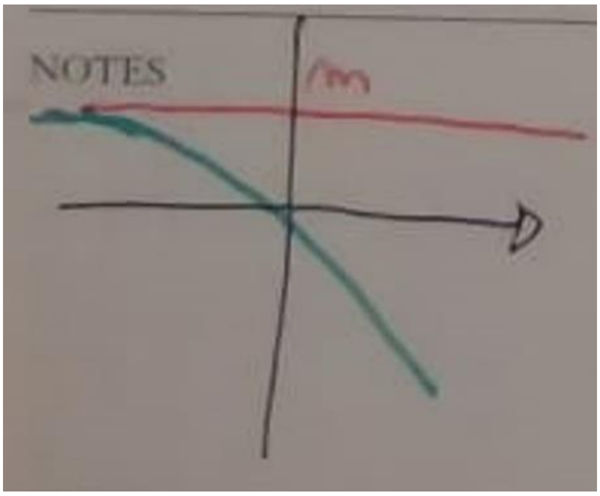
Data una funzione f:D →R

D illimitato a sinistra (D = R oppure D= [-∞, b[

Si dice la retta y = m è un asintoto orizzontale sinistro

Se esiste ed è finito il $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e tale limite è uguale ad m.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m$



Osservazione 1

A.O.dx e A.O.sx possono essere diversi

Osservazione 2

Nelle funzioni fratte A.Odx = A.O.sx

Si può fare direttamente $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

Asintoto obliquo (A. Ob.)

Asintoto obliquo destro (A. Ob. Dx)

Data una funzione f:D →R

D illimitato a destra (D = R oppure D= [a; +∞[

L'asintoto obliquo va cercato se non esiste l'astintoto orizzontale destro.

È una retta non parallela agli assi cartesiani di equazione y = mx+q

Ed esiste se:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} f(x)$ è finito e diverso da zero.

Tale limite rappresenta il coefficiente angolare delle rette

$m = \lim_{x \to +\infty} 1(x) . \frac{1}{x}$ con $m \in R \, e \, m \neq 0$

Se m verifica tali condizioni si calcola:

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$

Tale limite deve essere finito e rappresenta l'ordinata all'origine q

$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] con \, q \in R$

Asintoto obliquo sinistro (A. Ob. Sx)

Data una funzione f:D →R

D illimitato a sinistra (D = R oppure D=]-$\infty; b$])

L'asintoto obliquo sinistro va cercato se non esiste l'astintoto orizzontale sinistro.

È una retta non parallela agli assi cartesiani di equazione y = mx+q

ed esiste se:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} f(x)$ è finito e diverso da zero.

Tale limite rappresenta il coefficiente angolare m delle rette

$m = \lim_{x \to -\infty} f(x) . \frac{1}{x}$ con $m \in R \, e \, m \neq 0$

Se m verifica tali condizioni si calcola:

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]$ Tale limite deve essere finito e rappresenta l'ordinata all'origine q:

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q \qquad con \, q \in R$

Osservazione 1

A. Ob. Sx e A.Ob. dx possono essere diversi.

Osservazione 2

Se la funzione è fratta: A.Ob.sx = A. Ob. dx