



I limiti

Fare il limite da sinistra e da destra

Come si fa:

1) Prendo la formula

Limite destro	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
Limite sinistro	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

2) Sostituisco al posto della x il numero cui tende quel valore.

Quando si fa il limite da destra e da sinistra?

Quando c'è un caso limite. Un caso limite è quando ho un **numero fratto zero** perché non so se lo zero è un valore positivo o negativo.

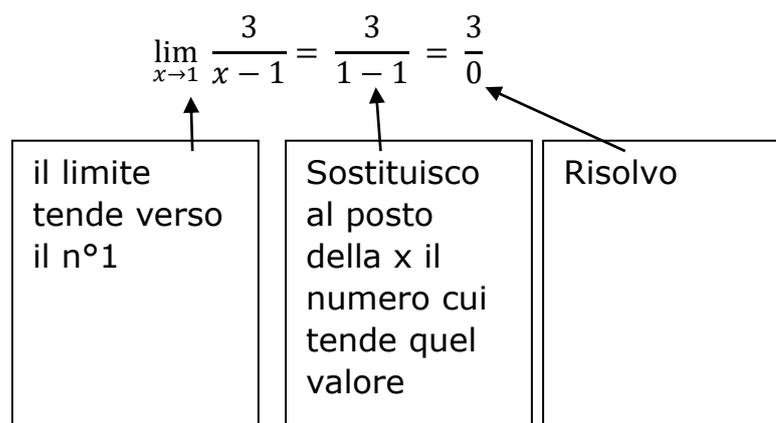
In questo caso faccio il limite da sinistra o da destra.

Esempio:

Calcolo il limite di:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1}$$

Procedura guidata:



$\frac{3}{0}$ è un caso limite perché non so se lo zero è un valore positivo o negativo.

Allora prendo l'intorno. L'intorno che prendo è l'intervallo aperto che va da x_0 in poi.



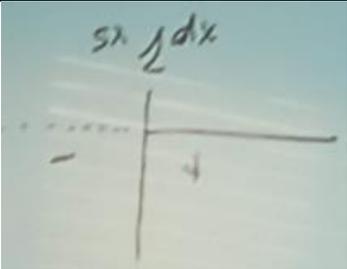
Quindi faccio il limite da destra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0}$$

Faccio il limite da sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0}$$

Per vedere se lo zero è positivo o negativo, **studio il segno del denominatore.**

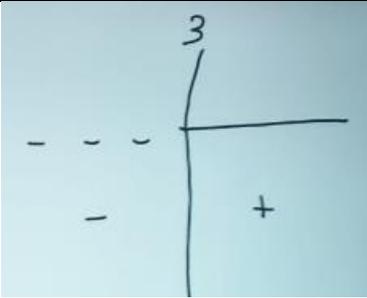
Procedura con esercizio guidato per vedere se lo 0 è positivo o negativo	
1. Pongo tutto il denominatore maggiore di zero	$x - 1 > 0$
2. Risolvo la disequazione ottenuta	$x > 1$
3. Faccio il grafico della soluzione della disequazione	 <p>Dal grafico vedo che il limite da sinistra è negativo, quindi scriverò</p> $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1}$ <p>Inoltre, dal grafico vedo che il limite da destra è positivo, quindi scriverò:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1}$
4. Faccio il calcolo dei segni. Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da destra. A destra di x_0 , c'è il segno +, quindi scrivo 0^+ al denominatore.	<p>Nel limite da destra:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0^+}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <p>Scrivo il + dopo lo zero</p> </div>



<p>Poi faccio segno del numeratore per segno del denominatore e ottengo il segno di - infinito o + infinito.</p>	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$ <p>Faccio + (segno del numeratore) per + (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. + per + fa +. Scrivo + infinito</p>
<p>5. Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da sinistra. A destra di x_0, c'è il segno -, quindi scrivo 0^- al denominatore.</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$ <p>Faccio + (segno del numeratore) per - (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. + per - fa -. Scrivo - infinito</p>

Esercizio 1

Trova il limite di $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-6}{x-3}$

Procedura con esercizio guidato	
<p>Il limite tende verso 3 ($x \rightarrow 3$). Sostituisco al posto della x il numero cui tende quel valore, quindi il numero 3 e poi risolvo.</p>	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-6}{x-3} = \frac{3-6}{3-3} = \frac{-3}{0}$ <p>Ho un caso limite. Non so se lo zero è un valore positivo o negativo. Cercherò il limite di sinistra e il limite di destra.</p>
<p>Pongo tutto il denominatore maggiore di zero</p>	$x - 3 > 0$
<p>Risolvo la disequazione ottenuta</p>	$x > 3$
<p>Faccio il grafico della soluzione della disequazione</p>	 <p>Dal grafico vedo che il limite da sinistra è negativo, quindi scriverò</p> $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-6}{x-3}$ <p>Inoltre, dal grafico vedo che il limite da destra è positivo, quindi scriverò:</p>



	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-6}{x-3}$
<p>Faccio il calcolo dei segni. Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da destra. A destra di x_0, c'è il segno +, quindi scrivo 0^+ al denominatore. Poi faccio segno del numeratore per segno del denominatore e ottengo il segno di - infinito o + infinito.</p>	<p>Nel limite da destra:</p> $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-6}{x-3} = \frac{3-6}{3-3} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ <p>Faccio + (segno del numeratore) per + (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. - per + fa -. Scrivo - infinito</p>
<p>Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da sinistra. A sinistra di x_0, c'è il segno -, quindi scrivo 0^- al denominatore.</p>	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-6}{x-3} = \frac{3-6}{3-3} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$ <p>Faccio - (segno del numeratore) per - (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. - per - fa +. Scrivo + infinito</p>

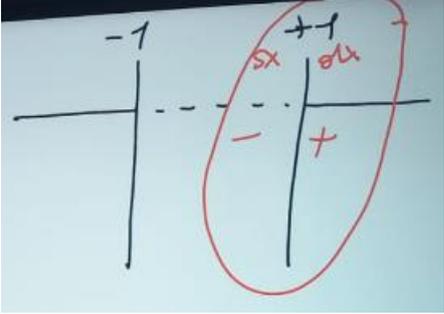
Esercizio 2

Trova il limite di

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{x^2 - 1}$$

Procedura con esercizio guidato	
<p>Il limite tende verso 1 ($x \rightarrow 1$). Sostituisco al posto della x il numero cui tende quel valore, quindi il numero 1 e poi risolvo.</p>	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1} = \frac{-7}{0}$ <p>Ho un caso limite. Non so se lo zero è un valore positivo o negativo. Cercherò il limite di sinistra e il limite di destra.</p>
<p>Pongo tutto il denominatore maggiore di zero</p>	$x^2 - 1 > 0$
<p>Risolvero la disequazione ottenuta</p>	<p>Devo risolvere l'equazione di secondo grado. Risolvero l'equazione associata. Faccio grafico e prendo i valori esterni Vado a vedere a sinistra e a destra di 1.</p> $\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm\sqrt{1} \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$



<p>Faccio il grafico della soluzione della disequazione</p>	 <p>Dal grafico vedo che il limite da sinistra di + 1 è negativo, quindi scriverò</p> $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1}$ <p>Inoltre, dal grafico vedo che il limite da destra è positivo, quindi scriverò:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-7}{x^2 - 1}$
<p>Faccio il calcolo dei segni. Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da destra. A destra di x_0, c'è il segno +, quindi scrivo 0^+ al denominatore. Poi faccio segno del numeratore per segno del denominatore e ottengo il segno di - infinito o + infinito.</p>	<p>Nel limite da destra:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1} = \frac{-7}{0^+} = -\infty$ <p>Faccio + (segno del numeratore) per + (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. - per + fa -. Scrivo - infinito</p>
<p>Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da sinistra. A destra di x_0, c'è il segno -, quindi scrivo 0^- al denominatore.</p>	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$ <p>Faccio - (segno del numeratore) per - (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. - per - fa +. Scrivo + infinito</p>

Esercizio 3

Trova il limite di

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{x^2 - 1}$$

Procedura con esercizio guidato	
<p>Il limite tende verso 1 ($x \rightarrow 1$). Sostituisco al posto della x il numero cui tende quel valore, quindi il numero 1 e poi risolvo.</p>	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1} = \frac{-7}{0}$ <p>Ho un caso limite. Non so se lo zero è un</p>



	<p>valore positivo o negativo. Cercherò il limite di sinistra e il limite di destra.</p>
Pongo tutto il denominatore maggiore di zero	$x^2 - 1 > 0$
Risolvero la disequazione ottenuta	<p>Devo risolvere l'equazione di secondo grado. Risolvero l'equazione associata. Faccio grafico e prendo i valori esterni Vado a vedere a sinistra e a destra di 1.</p> $x^2 - 1 = 0$ $x^2 = 1$ $x = \pm\sqrt{1}$ $x = \pm 1$
Faccio il grafico della soluzione della disequazione	<p>Dal grafico vedo che il limite da sinistra di + 1 è negativo, quindi scriverò</p> $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1}$ <p>Inoltre, dal grafico vedo che il limite da destra è positivo, quindi scriverò:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-7}{x^2 - 1}$
<p>Faccio il calcolo dei segni. Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da destra. A destra di x_0, c'è il segno +, quindi scrivo 0^+ al denominatore. Poi faccio segno del numeratore per segno del denominatore e ottengo il segno di - infinito o + infinito.</p>	<p>Nel limite da destra:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1} = \frac{-7}{0^+} = -\infty$ <p>Faccio + (segno del numeratore) per + (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. - per + fa -. Scrivo - infinito</p>
<p>Sostituisco il numero del limite nelle formule con i limiti. Limite da sinistra. A sinistra di x_0, c'è il segno -, quindi scrivo 0^- al denominatore.</p>	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-7}{x^2 - 1} = \frac{-7}{(1)^2 - 1} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$ <p>Faccio - (segno del numeratore) per - (segno dopo lo zero) e ottengo il segno che va davanti all'infinito. - per - fa +. Scrivo + infinito</p>



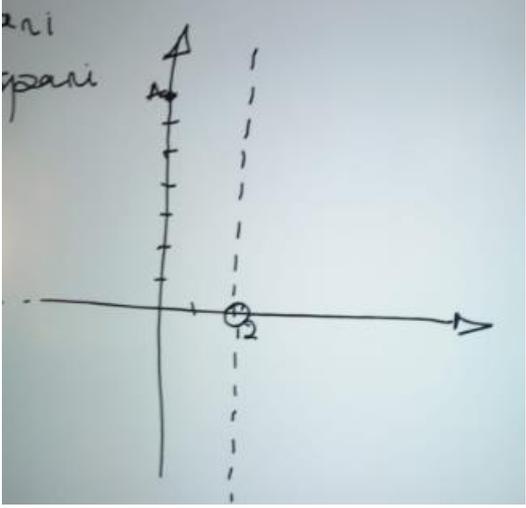
Esercizio 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{x^2} \right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

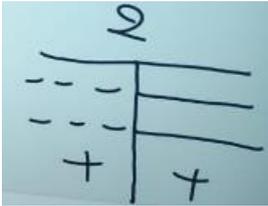
Qui ho già zero + al denominatore, perché so che x al quadrato è sempre positivo, quindi il problema non sorge, cioè non ho necessità di calcolare il limite destro e il limite sinistro.

Esercizio 4 - Studiamo una funzione con forme indeterminate.

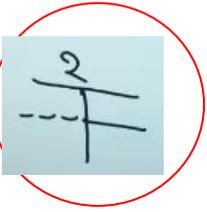
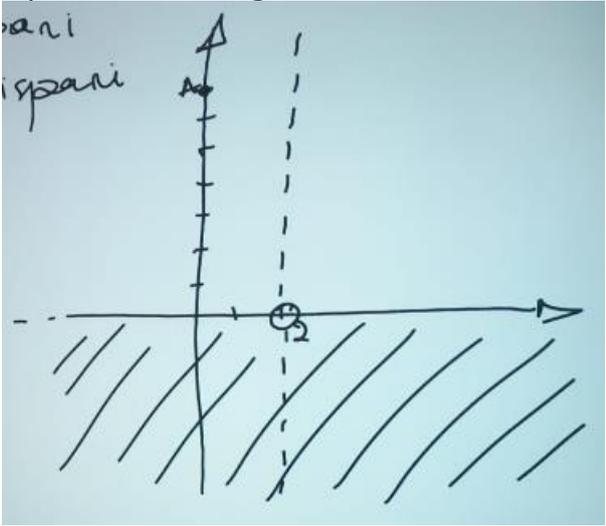
$$y = \frac{7x - 14}{x - 2}$$

PROCEDURA	SVOLGIMENTO
1. La funzione è pari o dispari?	Non è né pari né dispari, significa che non ci sarà nessuna simmetria
2. Pongo la funzione maggiore di zero quindi cerco il dominio diverso da 0	$\frac{7x - 14}{x - 2} > 0$ $x - 2 \neq 0$ $x \neq 2$ $D = \mathbb{R} - \{ 2 \}$
3. Faccio grafico parziale	
4. Cerco le intersezioni con l'asse delle Y.	$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{7x - 14}{x - 2} = \frac{-14}{-2} = -7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \end{cases}$ <p>Ho il punto: A(0; 7) Lo riporto sul grafico</p>



<p>5. Cerco le intersezioni con l'asse delle x. Una volta trovate, verifico se posso accettarle.</p>	$\begin{cases} Y = 0 \\ y = \frac{7x - 14}{x - 2} \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ \frac{7x - 14}{x - 2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ (x - 2) \frac{7x - 14}{x - 2} = \frac{0}{x - 2} (x - 2) \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 0 \\ 7x - 14 = 0 \end{cases}$ <p>Ho il punto O(0;0)</p>
<p>6. Aggiungo i punti sul grafico parziale</p>	
<p>STUDIO DEL SEGNO</p> <p>Pongo tutta la funzione maggiore di zero e ottengo una disequazione che devo risolvere. Con la disequazione fratta, si pone il numeratore maggiore di zero e il denominatore maggiore di zero</p>	<p>Pongo tutta la funzione maggiore di zero: $\frac{7x - 14}{x - 2} > 0$</p> <p>Pongo il numeratore maggiore di zero: $7x - 14 > 0$</p> <p>Pongo il denominatore maggiore di zero: $x - 2 > 0$</p> <p>Devo risolvere le 2 disequazioni. Risolvo la prima disequazione: $7x - 14 > 0$</p> <p>L'ho già risolta e ho le soluzioni. Faccio il grafico del numeratore</p>  <p>Poi il grafico del denominatore</p>  <p>Li unisco.</p>  <p>Cerchio il grafico del denominatore.</p>



	 <p>I valori che devo prendere sono esterni. Riporto tutto sul grafico cartesiano:</p> 
<p>STUDIO DEI LIMITI Faccio i limiti a + infinito e a - infinito e nel punto 2 cioè nei punti che non appartengono al denominatore.e</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7x-14}{x-2} \right) = \frac{0}{0}$ F.I. È UNA FORMA INDETERMINATA. MI FERMO cioè non vado avanti.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x-14}{x-2} \right) = \frac{-\infty}{-\infty}$ F.I.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x-14}{x-2} \right) = \frac{-\infty}{-\infty}$ F.I.</p>

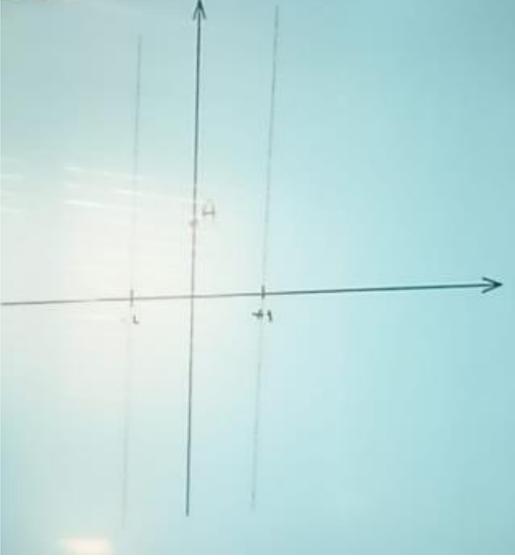
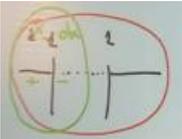
Esercizio 5- Studiamo una funzione con forme determinate

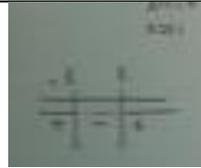
NB: Nel compito ci saranno solo funzioni con forme determinate.

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

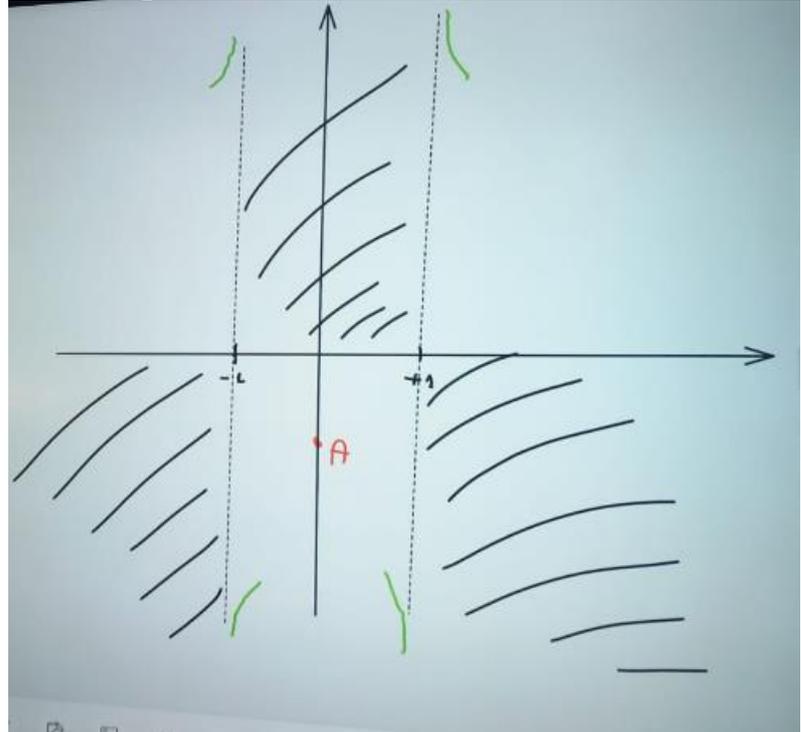
PROCEDURA	SVOLGIMENTO
La funzione è pari o dispari?	È PARI
Pongo la funzione maggiore di zero quindi cerco il dominio diverso da 0	$\frac{1}{x^2 - 1} > 0$ $x^2 - 1 \neq 0$ $x^2 \neq 1$ $x \neq \pm 1$ $D = \mathbb{R} - \{-1; +1\}$



Faccio grafico parziale	
Cerco le intersezioni con l'asse delle Y.	$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ Ho il punto: $A(0; -1)$ Lo riporto sul grafico
Cerco le intersezioni con l'asse delle x. Una volta trovate, verifico se posso accettarle.	$\begin{cases} Y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \nexists$ Non posso accettare la soluzione. Scrivo B non appartiene al dominio.
Aggiungo i punti sul grafico parziale	
STUDIO DEL SEGNO Pongo tutta la funzione maggiore di zero e ottengo una disequazione che devo risolvere. Con la disequazione fratta, si pone il numeratore maggiore di zero e il denominatore maggiore di zero	Pongo tutta la funzione maggiore di zero: $\frac{1}{x^2 - 1} > 0$ Pongo il numeratore maggiore di zero: $1 > 0$ SUCCEDE SEMPRE. QUINDI IL GRAFICO È UNA LINEA ORIZZONTALE <hr style="width: 20%; margin: 10px auto;"/> Pongo il denominatore maggiore di zero: $x^2 - 1 > 0$ $x^2 = 1$ $x = \pm 1$ Faccio il grafico del denominatore e ci faccio un bel cerchio.  Unisco i due grafici:



So che prima di -1 la funzione è positiva ecc. Riporto tutto sul grafico cartesiano.



STUDIO DEI LIMITI (CHE SAREBBE LO STUDIO DEGLI ASINTODI)

Faccio i limiti a + infinito e a - infinito e nel punto 2 cioè nei punti che non appartengono al denominatore.e

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0}$$

Posso proseguire con questo limite? Devo fare il limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Ho trovato l'ordinata. Significa che l'ordinata di -1 a sinistra se ne andrà a più infinito.

A destra di -1, il valore dell'ordinata se ne andrà in basso.

(in verde nella foto sopra). Quindi la funzione è simmetrica. Poiché è simmetrica, non serve calcolare il limite dall'altra parte.

