I limiti

Ripassiamo la definizione di intervallo

Presi 2 numeri reali A e B, un intervallo è tutti i numeri A e B compresi fra 2 numeri reali dati.

Un intervallo si dice aperto se non consideriamo A e B.

L'intervallo aperto si indica:]a, b[

Questo intervallo significa che prendiamo tutti i numeri compresi tra a e b (ma non prendiamo né a né b).

Intorno completo

Definizione: $X_o \in R$

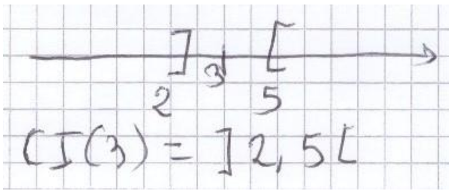
Si chiama intorno di X_o un qualunque intervallo aperto contenente X_o

<u>Esempio:1</u>

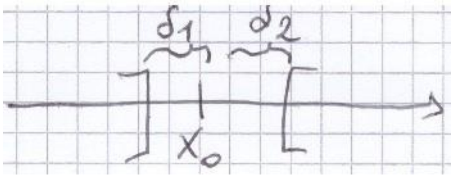
L'intervallo aperto I =]2,5[è un intorno di 3 perché contiene il punto 3, quindi è un intorno del punto 3.

I =]2,99, 3, ∞ [è un intorno di 3

Si indica con $I(X_o)$



$I(X_o) =]\ X_o - \delta 2, X_o + \delta 2[$

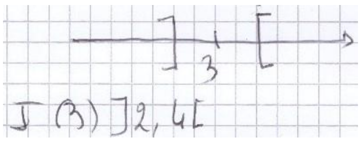


<u>Simbologia</u>:

δ si legge "delta". Rappresenta un numero estremamente piccolo.

Intorno circolare

Definizione: Un intorno di X_o si dice circolare se X_o è il punto medio dell'intervallo



$I(X_o) =]\ X_o - \delta, Xo + \delta[$

Intorno destro

Si chiama intorno destro l'intervallo $I^+(X_o) =]\, X_o, X_o + \delta[$

Intorno sinistro

Si chiama intorno sinistro l'intervallo $I^-(X_o) =]\, X_o - \delta, X_o[$

Intorno di $+\infty$

$I(+\infty) =]b, +\infty[$

Intorno di $-\infty$

$I(-\infty) =]-\infty, a[$

Punto di accumulazione

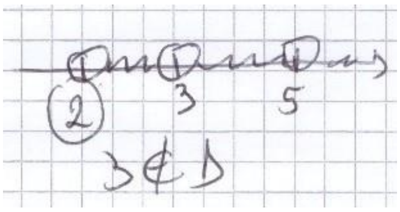
Definizione: Sia D un sottoinsieme dei numeri reali[1]

n è un numero reale che può non appartenere all'insieme D

$X_o \in R$

X_o è un punto di accumulazione di D se ogni intorno completo di X_o contiene infiniti punti dell'insieme D.

Esempio: $X_o \in R$



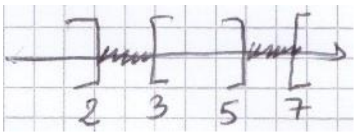
Nell'insieme D =]2,3[U]3,5[

1) Mi chiedo: 3 è un punto di accumulazione per il mio insieme D? vado a vedere
2) Prendo un intorno di 3.
3) 3 è un punto di accumulazione perché non appartiene a D ma tutti i punti che gli stanno vicino appartengono a D.
4) Prendo il punto 2,5 e il punto 4: appartengono a D.

I(3)= =]2,5, 4[

Esempio di cosa non è un punto di accumulazione:

Ho il dominio D =]2,3[U]5,7[



[1] NB: nelle nostre funzioni D è il dominio

1) Mi chiedo: 4 è un punto di accumulazione per questo insieme D?
2) Prendo 3,5 come intorno di 4 e prendo 4,5.
3) I(4) =]3,5 , 4,5[
4) I punti che sono vicini a 4 non sono nel dominio, quindi 4 non è un punto di accumulazione.

Significato di LIMITE

Cosa sono i limiti (in maniera ufficiosa): **Trovare il limite significa trovare l'ordinata di un punto di una funzione che non appartiene al dominio**.
Attenzione! Questa non è una definizione!

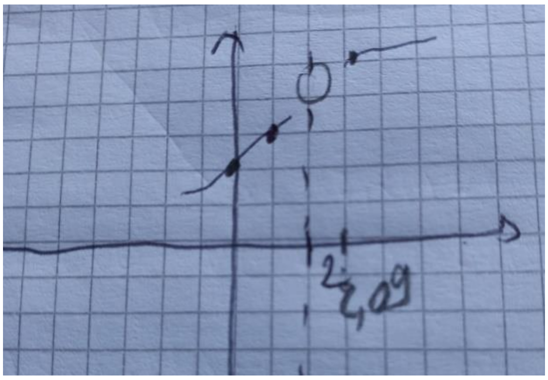
Esempio:

$y = \frac{2x^2 - 6x}{x-3}$

$x-3 \neq 0$

$x \neq 3$

$D = R - \{ 3 \}$



x	f(x)
2,9	5,8
2,99	5,98
2,999	5,998
2,9999	5,9998
3	?
3,1	6,2
3,01	6,02
3,001	6,002
3,001	6,0002

Quanto più x si avvicina a 3 tanto più f(x) si avvicina a 6.

$\Rightarrow$ per ogni x → 3 f(x) → 6

Possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} = 6$$

Il limite è un'operazione che permette di studiare il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto.

Definizione di limite finito per x che tende a X_o

(definizione insiemistica)

$X_o \in R$ si legge: F è una funzione definita nel dominio e ha valore

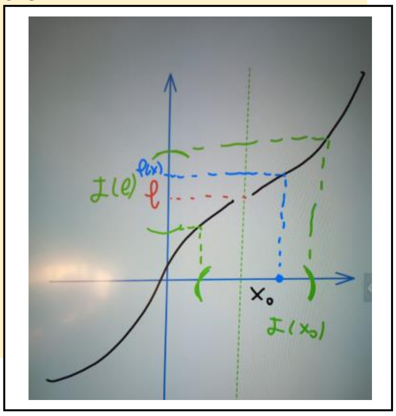
in R f D→R

X_o punto di accumulazione del dominio

Si dice che

l (elle) è il limite per x che tende a X_o di f(x) e si scrive:

$$\lim_{x \to xo} f(x) = l$$



<u>Definizione in simboli:</u>

$$\forall I(l) \exists \; \mathrm{I}\,(x0)\; t.c. \;\forall x \in \; \mathrm{I}(x0)\,,\;\; x \neq 0\,,\;\; x \in D \;\; \Rightarrow f(x) \in Il$$

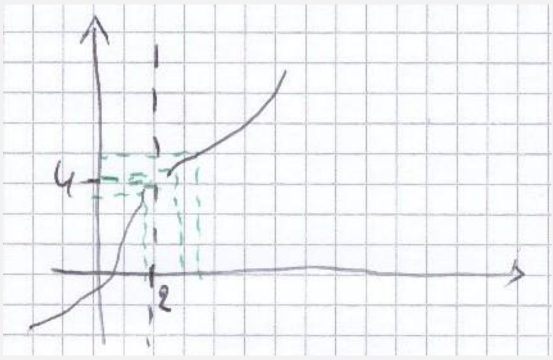
(si legge: per ogni intorno di l (*elle*) esiste un intorno di x con zero (l'intorno di x con zero di pende dall'intorno di l) tale che per ogni x appartenente all'intorno di x con zero con x diverso da x con zero e con x che appartiene al dominio si verifica che f di x appartiene all'intorno di l)

<u>Spiegazione più dettagliata:</u>

$\forall I(l)$	$\exists \; \mathrm{I}\,(x0)$	$t.c.$	$\forall x \in \; \mathrm{I}(x0)$	,	$x \neq 0$	, $x \in D$	$\Rightarrow$	$f(x) \in Il$
per ogni intorno di l (*elle*)	esiste un intorno di x con zero (l'intorno	Tale che	per ogni x appartenente all'intorno di x con zero	con	x diverso da x con zero	con x che appartiene al dominio	si verifica che	f di x appartiene all'intorno di l

X_o, essendo un punto di accumulazione per il dominio, ogni suo intorno ha infiniti punti del dominio.

<u>Esempio:</u> Per la funzione $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ (vedi esercizio sopra sul significato del limite)



Nel punto 2 la funzione non c'è.

Abbiamo sostituito tutti i punti prima e dopo il 2. Abbiamo trovato tutti punti vicino al 4.

I punti vicino a X_0 devono essere diversi da 2 quindi da X_0. Chi mi dice che questi punti appartengono al dominio? A X_0 ho messo una posizione precisa nella definizione: che è un punto di accumulazione che può non appartenere al dominio ma i punti intorno appartengono al dominio (ogni intorno di x con zero ha infiniti punti del dominio).

Algebra di limiti

I limiti che vedremo sono zero e l'infinito.

L'infinito non è un numero, è una quantità grande grande che non si può quantizzare. È come l'oceano. L'infinito senza il segno davanti non ha nessun significato, devo avere un segno davanti (+ o -∞)

$A^0=1$, $a\neq0$

$\frac{0}{a} = 0 \qquad a\neq0$

Sia $a \in R \quad n\in N \quad a>0$

$$\frac{a}{0} = \pm\infty$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$$

$$\frac{0}{\pm\infty} = \pm\infty$$

Le operazioni con l'infinito:

$$+\infty + a = +\infty \qquad -\infty + a = -\infty$$

$+\infty - a = +\infty \qquad -\infty - a = -\infty$

$+\infty . +a = +\infty \qquad -\infty . (+a) = -\infty$

$+\infty . (-a) = -\infty \qquad -\infty . (-a) = +\infty$

$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$-\infty - \infty \quad F.I$ è la prima **forma indeterminata**. Quando la troviamo, ci fermiamo.

$(+\infty)^n$=+∞

$(-\infty)^n \quad se\ n\ è\ \boldsymbol{pari}\ ho = +\infty \qquad se\ n\ è\ \boldsymbol{dispari}\ ho = -\infty$

$+\infty^{+\infty}$=+∞

$+\infty^{-\infty}$=0

Forme indeterminate

$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0.(\pm\infty) \qquad +\infty - \infty \qquad 0^0 \qquad 1^{\pm\infty} \qquad +\infty^0$

Esercizi:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x^3+5) = (+\infty)^2+(+\infty)^3+5 = +\infty+\infty+5 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+2) = (-\infty)^2-(-\infty)+2 = +\infty+\infty+2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2) = (-\infty)^3+(-\infty)^2 = -\infty+\infty = \text{F.I.}$$

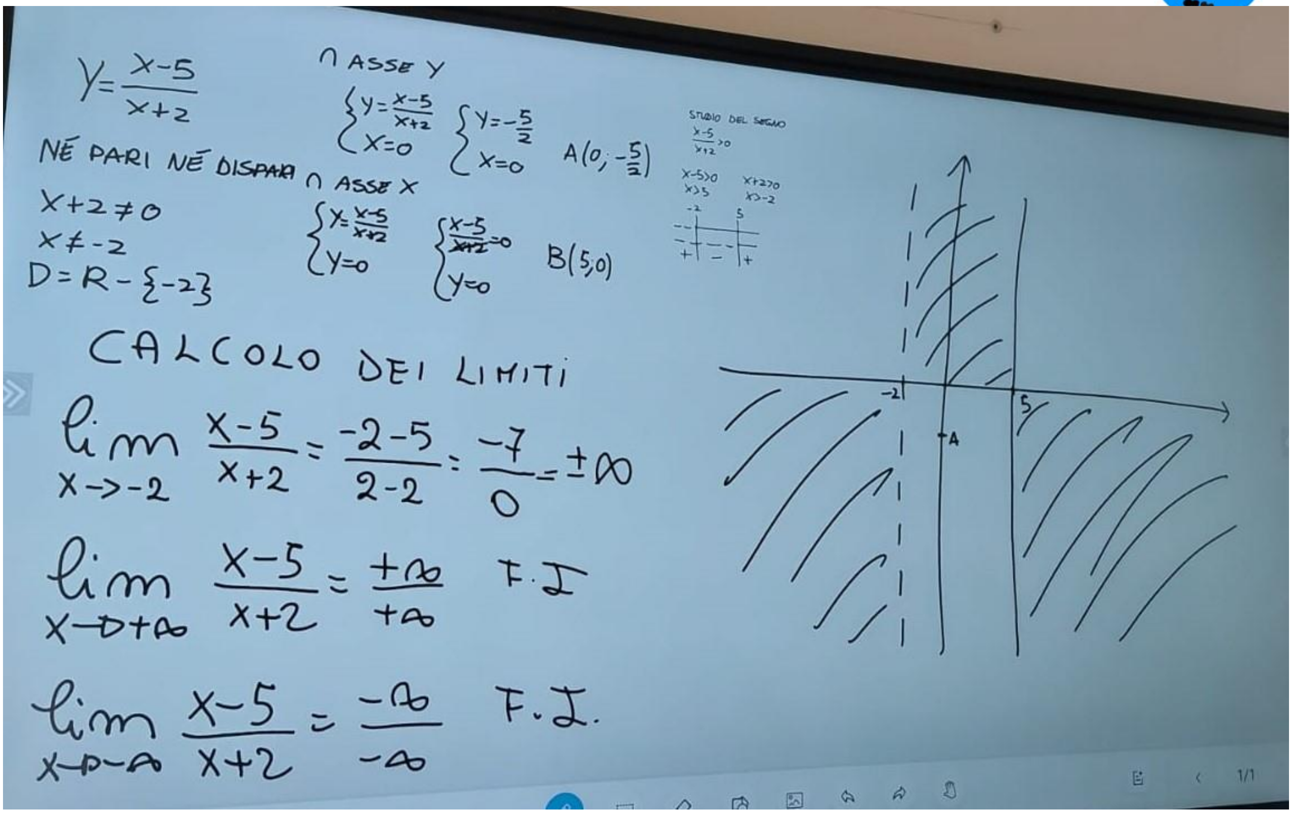
$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(3)^2-9}{(3)^2-3(3)} = \frac{9-9}{9-9} = \frac{0}{0}\ \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3-5}{x} = \frac{(0)^3-5}{0} = \frac{-5}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^4+x} = \frac{(+\infty)^3+\infty}{(+\infty)^4+\infty} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{F.I}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x+5} = \frac{7}{-\infty+5} = \frac{7}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-6}{x^2-x} = \frac{+\infty-6}{+\infty-(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty-\infty} = \text{f.i.}$$


y = (x-5)/(x+2)
∩ ASSE Y
NÉ PARI NÉ DISPARI
∩ ASSE X
x+2 ≠ 0
x ≠ -2
D = R - {-2}
A(0; -5/2)
B(5;0)
STUDIO DEL SEGNO
CALCOLO DEI LIMITI
lim x->-2 (x-5)/(x+2) = (-2-5)/(2-2) = -7/0 = ±∞
lim x->+∞ (x-5)/(x+2) = +∞/+∞ F.I
lim x->-∞ (x-5)/(x+2) = -∞/-∞ F.I.