La parabola con asse di simmetria parallelo all’asse delle x

ESERCIZIO TIPO CON PROCEDURA GUIDATA

1) Data l’equazione della parabola $y = -x^2 -2x +3$ determinare l’asse di simmetria, il vertice, il fuoco, la direttrice.

2) Determinare le eventuali intersezioni con l’asse delle ascisse,

3) Disegnare il grafico.

1. Scrivo i coefficienti a, b, c

a = -1

b= -2

c = 3

2. Conosco il valore di a. Da questo valore capisco la concavità della parabola

Concavità della parabola verso l’alto o verso il basso?

Il grafico della parabola ha i grafici che sono con la concavità verso l’alto o verso il basso. Il segno di a determina la parabola triste o sorridente.

Se a è positivo (a è il coefficiente della x)	Concavità verso l’alto (“parabola che sorride”)
Se a è negativo (a è il coefficiente della x)	Concavità verso il basso (“parabola triste”)

3. Calcolo l’asse di simmetria della parabola

L’asse di simmetria della parabola è una retta verticale di equazione $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2.-1} = -\frac{-2}{-2} = -1$$

3. Calcolo il vertice

Il vertice della parabola è un punto V che si trova sull'asse e ha per coordinate $V(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$

NB: Se xV = 0, significa che il vertice è l'origine degli assi.

NB: Il vertice è sull'asse di simmetria.

a) Determino il **primo punto** del vertice:

$$xV\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{2}{2.(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

b) Determino il **delta**

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4ac = (-2)2-4(-1)(+3)= 4+12=16$

$\Delta = 16$

c) Determino il **secondo punto** del vertice:

$$Vy = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4.(-1)} = -\frac{16}{-4} = +4$$

d) Quindi il vertice ha **coordinate** V(-1;+4)

4. Calcolo le coordinate del **fuoco** della parabola

Il fuoco della parabola è un punto F che si trova sull'asse e ha per coordinate: $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

NB: Il fuoco sta sull'asse di simmetria. (Non è un punto della parabola; serve per fare altri calcoli)

a) Ho già calcolato il **primo punto** del fuoco che è uguale al primo punto del vertice. Quindi x = -1

b) Calcolo il **secondo punto** del fuoco:

$$\left(y = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-16}{4.-1} = \frac{-15}{-4} = \frac{15}{4}\right)$$

c) Quindi il fuoco ha **coordinate**: F(-1; $\frac{15}{4}$)

5. Calcolo la **direttrice**

La retta direttrice è una retta orizzontale ed ha equazione $Y = \frac{-1+\Delta}{4a}$

$$Y = \frac{-1+\Delta}{4a} = \frac{-1-16}{-4} = \frac{-17}{-4} = \frac{17}{4}$$

6. Cerco qual è l'intersezione della parabola con l'asse y

x = 0. Il punto di intersezione è dato dal valore di c. Ottengo questo punto:

A = (0, c)

Nel nostro esempio, A(0;3)

7. Cerco quali sono le intersezioni della parabola con l'asse x

Ottengo due punti sull'asse delle x.

y = 0

Calcolo gli altri punti:

$I_{x1} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Ottengo il punto $B(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; 0)$

$I_{x2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Ottengo il punto $C(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}; 0)$

Nel nostro esempio: $I_{x1} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$ B (-3;0)

$I_{x2} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$ C(1;0)

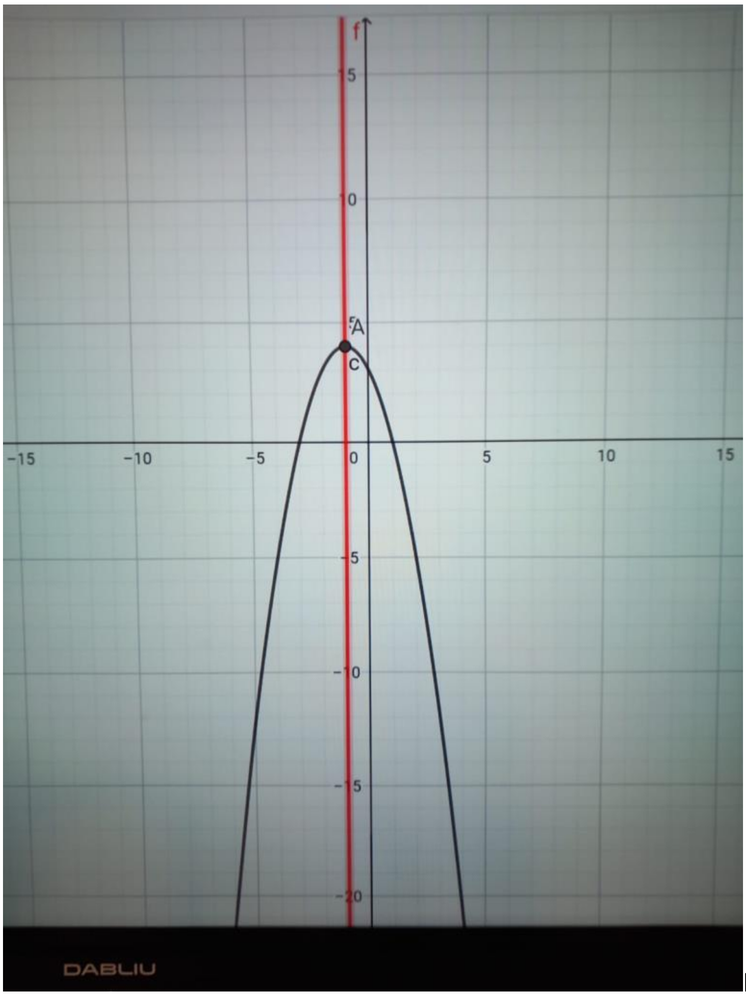
La parabola passa per i punti B e C che posso riportare sul grafico.

8. Traccio il grafico della parabola.

1) Disegno il piano cartesiano (l'asse delle x e l'asse delle y),
2) Disegno l'asse di simmetria,
3) Disegno il vertice che è tondo,
4) Metto le intersezioni con l'asse y,
5) Metto le intersezioni con l'asse x,
6) Per ogni punto trovato, posso trovare anche il punto simmetrico rispetto all'asse di simmetria, posto alla stessa altezza e a uguale distanza dall'asse di simmetria, ma dalla parte opposta a questo.
7) Se i punti non sono sufficienti, trovo altri punti con la tabella x-y e i loro simmetrici rispetto all'asse y. Prendo 3 punti a caso per l'ascissa e determiniamo le ordinate della funzione. Se prendo dei

numeri positivi, i calcoli sono più semplici.

x	y
0	$Y = -x^2 -2x +3 = -0^2 -2.0 +3 = +3$
1	$Y = -x^2 -2x +3 = -1^2 -2.1 +3 = 0$
2	$Y = -x^2 -2x +3 = -(2)^2 -2.(2) +3 = -4-4+3=-8+3= -5$
-2	$Y = -x^2 -2x +3 = -(-2)^2 -2.(-2) +3 = -4+4+3=3$



NB: in rosso c'è l'asse di simmetria

Attenzione ai casi particolari della parabola!

I casi particolari della parabola:

	Con la retta	Con la parabola
Se il termine noto = 0 cioè Se $c=0$ abbiamo l'equazione $y = a\,x^2 + bx$	$b = 0$ abbiamo una retta. tutte le rette passano per l'origine degli assi	$b \neq 0$ La parabola passa per l'origine degli assi
Se $b = c = 0$ abbiamo l'equazione $y = ax^2$		Il vertice è nell'origine ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. Ha per asse l'asse y se b e c sono zero, la x del fuoco è sempre zero perché è la x del vertice: $y = a\,x^2$ → se $a>0$ es. $y = 3x^2$ allora $y \gg 0$ y è maggiore o uguale a 0 $y = a\,x^2$ → se $a<0$ es. $y = -3x^2$ allora $y<0$
Se $b = 0$ e $c \neq 0$ Abbiamo l'equazione $y = ax2 + c$		Ha per asse l'asse y, di equazione $x = 0$ L'ascissa del vertice e del fuoco dipendono da b. Se b è 0, l'ascissa del vertice e del fuoco sono 0, quindi sappiamo già dove sta sistemato.

ALTRA TIPOLOGIA DI ESERCIZIO:

Determinare le eventuali intersezioni della parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 5$ **con una retta di cui l'equazione è** $Y = -2x + 14$

9. Per determinare le eventuali intersezioni della parabola con una retta, cioè per sapere se la retta e la parabola s'incontrano e dove, metto a sistema le equazioni e calcolo il delta.

FASE 1

Metto a sistema la parabola e la retta.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 & \text{(equazione della parabola)} \\ Y = -2x + 14 & \text{(equazione della retta)} \end{cases}$$

FASE 2

Con il metodo della sostituzione, sostituisco la retta all'interno della parabola. Così ottengo un'equazione di secondo grado.

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 = -2x + 14 \\ Y = -2x + 14 \end{cases}$$

SOSTITUISCO IL VALORE DI Y DELLA RETTA NELL'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 + 2x - 14 = 0 \\ Y = -2x + 14 \end{cases}$$

PORTO TUTTI I VALORI AL PRIMO MEMBRO. MI RICORDO DI CAMBIARGLI DI SEGNO

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 9 = 0 \\ Y = -2x + 14 \end{cases}$$

OTTENGO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO.

FASE 3

Risolvo l'equazione di II grado calcolando il delta. $\Delta = b^2 - 4ac$ e in base al delta capisco quante soluzioni ci sono e se la retta è secante, esterna o tangente alla parabola

$\Delta>0$	esistono 2 soluzioni reali e distinte: X_1 (leggere x con 1) è diverso da x_2 (leggere x con 2) La parabola incontra asse delle x (ascisse) in 2 punti distinti. La retta è **secante** la parabola.
$\Delta<0$	Nessuna soluzione. Non c'è nessuna intersezione. Retta e parabola non si incontrano. La retta è **esterna** alla parabola.

Δ=0	Esiste una soluzione doppia x1=x2 La parabola incontra l’asse x in un unico punto: il vertice. La retta è **tangente** alla parabola.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4(-1)(-9) = 36 - 36 = 0$$

Capisco che la retta è tangente alla parabola ed ha un solo punto d’intersezione che ora calcolo.

FASE 4

Calcolo il o i punti d’intersezione. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e lo scrivo nel sistema

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2.(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ Y = -2x + 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ Y = -2x + 14 \end{cases}$$

ho trovato il valore di x. Ora cerco il valore di y sostituendo il valore di x nell’equazione di primo grado

$$\begin{cases} x = 3 \\ Y = -2.\,(3) + 14 = -6 + 14 = 8 \end{cases}$$

Ora posso scrivere la risposta e disegnare la retta:

Il punto di intersezione è T(3;8)

Il grafico: