Rette tangenti ad una parabola - Procedura

A seconda di dove è sistema il punto possiamo avere nessuna, una o 2 tangenti.

Se il punto appartiene alla parabola: possiamo determinare (cioè avere) una sola tangente

Come si fa a vedere se il punto appartiene o no a una curva in generale?

Per verificare se un punto P appartiene o meno ad una curva, prendo le coordinate del punto e le sostituisco nell'equazione della curva.

Esercizio con procedura guidata:

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $Y = 2x^2 - 6x + 1$ passanti per il punto P_1 di coordinate $P_1(1;2)$ e per il punto P_2 di coordinate $P_2(0;1)$.

1. Verifico se il punto appartiene a una curva.

Nell'equazione della parabola $Y = 2x^2 - 6x + 1$, dire se il punto P_1 di coordinate $P_1(1;2)$ appartiene alla parabola.

1.1. Dalle coordinate del punto P scrivo X_p e, y_p

Le coordinate del punto P_1 sono P(1;2):

$X_{p1} = 1$

$y_{p1} = 2$

1.2. Sostituisco i punti X_{p1} e, y_{p1} nell'equazione della parabola

$Y = 2x^2 - 6x + 1$

$2 \ ?= 2.1^2 - 6.1 + 1$

$2 \ ? = 2-6+1 = -3$

2 non è uguale a -3, quindi il punto P non appartiene alla parabola perché non abbiamo ottenuto l'identità.

E il punto P2 di coordinate $P_2(0;1)$, appartiene alla parabola?

$x_2 = 0$

$y_2 = 1$

$1 \ ?= 2.0^2 - 6.1 + 1$

$1? = 1$ Siccome 1 = 1, il punto appartiene alla parabola. C'è un'unica tangente. $P_2(0;1)$ è il punto tangente alla parabola.

2. Voglio determinare l'equazione della retta tangente

2.1. Scrivo il sistema

$$\begin{cases} Y = 2x^2 - 6x + 1 & \text{equazione della parabola} \\ Y - y_2 = m(x - x_2) & \text{Equazione di un fascio di rette passanti per il punto } P_2(x_2;y_2) \text{ tangente alla parabola,} \end{cases}$$

2.2. Sostituisco i dati del punto $P_2(0;1)$ tangente alla parabola, (quindi di X_2 e y_2) nell'equazione del fascio di rette

$$\begin{cases} Y = 2x^2 - 6x + 1 \\ Y - 1 = m(x - 0) \end{cases}$$ equazione del fascio di rette (cioè di infinite rette) che passa per un punto

$$\begin{cases} Y = 2x^2 - 6x + 1 \\ Y = mx + 1 \end{cases}$$ equazione del fascio di rette che passa per il punto $P_2(0;1)$ tangente alla parabola

2.3. Risolvo il sistema con il metodo della sostituzione

$$\begin{cases} Y = 2x^2 - 6x + 1 \\ 2x^2 - 6x \cancel{+1} = mx \cancel{+1} \end{cases}$$ semplifico

Porto tutti i termini al primo membro e ottengo:

$2x^2 - 6x - mx = 0$

Raggruppo i termini con x per ottenere un'equazione di secondo grado:

$2x^2 - 6x - mx = 0 \rightarrow 2x^2 + (-6 - m)x = 0$

Ottengo la seguente equazione di secondo grado: $2x^2 + (-6 - m)x = 0$

3. voglio ottenere il coefficiente angolare della retta tangente.

3.1. Dall'equazione di secondo grado ottenuta: $2x^2 + (-6 - m)x = 0$ scrivo a = , b= , c=

a = +2

b = -6-m

c = 0 perché non c'è

3.2. Calcolo il delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6-m)^2 - 4.(2).0$

$\Delta = (-6-m)^2$ ho ottenuto il quadrato di un binomio. Ora lo calcolo.

$\Delta = (-6-m)^2 = +36 + m^2 + 2(-6)(-m)$

$\Delta = (-6-m)^2 = +36 + m^2 + 12 .m = m^2 + 12 m +36$

3.3. Determino la condizione di tangenza.

La condizione di tangenza è che il delta deve essere uguale a 0. Quindi fra tutte le rette che passano per il punto P di coordinate P(0;1) voglio determinare la retta tangente che si ottiene ponendo il $\Delta = 0$

Condizioni di tangenza $\Delta = 0$

$\Delta = m^2 + 12 .m +36 = 0$

3.4. Risolvo con il metodo della sostituzione l'equazione di secondo grado calcolando il coefficiente angolare m1 e m2 che sono delle rette tangenti: $m1{,}2 = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Risolvo l'equazione di secondo grado: $m^2 +12m +36 = 0$

a= 1 b = 12 c = 36

$$m1{,}2 = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

Ho trovato i due coefficienti angolari:

$m_1 = -6$

$m_2 = -6$

3.5. Prendo l'equazione del fascio di rette tangenti alla parabola e sostituisco i valori di m_1 e m_2, così trovo l'equazione della/e retta/e tangente/i alla parabola.

Avevamo l'equazione del fascio di rette che passa per P: $y = mx + 1$

Ho i due coefficienti angolari: $m_1 = -6$ e $m_2 = -6$

Sostituisco:

$Y = \underbrace{-6}_{m_{1,2}} x + 1$ Ho ottenuto l'equazione della retta tangente alla parabola per il punto P(0; 1)